2022年度　茨城キリスト教大学一般選抜入学試験１期

数学Ⅰ

解答上の注意

1. 解答は解答用紙に記入し，計算式の欄には計算過程を記述しなさい。
2. 分数で解答する場合，それ以上約分できない形で答えなさい。
   例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。
3. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
   例えば，$4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。
   また，分数の分母に根号を含む場合は，分母を有理化して答えなさい。

Ⅰ　以下の問いに答えなさい。

問１　$(a+b+c)^2$ を展開しなさい。

問２　$(x-3)(x+8)(x+1)(x+4)+180$ を因数分解しなさい。

問３　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい。

問４　xの不等式 $0<\dfrac{3}{x}-1\leqq 2$ を解きなさい。

問５　集合$A=\left\{n^2 \,\middle|\, 0\leqq n\leqq 3\,,\ n\text{は整数}\right\}$について，次の①～④の中から誤っているものをすべて選びなさい。

①　$0\in A$　　②　$1\notin A$　　③　$2\in A$　　④　$9\in A$

Ⅱ　以下の問いに答えなさい。

問１　三角形 ABC において

$$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$$

が成り立っている。ここで，∠A, ∠B, ∠Cの大きさをそれぞれ A,B,C と表す。また，BC, CA, AB の長さをそれぞれ a,b,c とする。

(1)　$a:b:c$ を求めなさい。

(2)　$\cos C$ を求めなさい。

問２　２次関数 $y=x^2-4x-a+3$ のグラフが x 軸と異なる２つの点P, Qで交わっている。

(1)　定数 a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2)　2つの点P, Q の x 座標の符号が異なるとき，定数aのとり得る値の範囲を求めなさい。

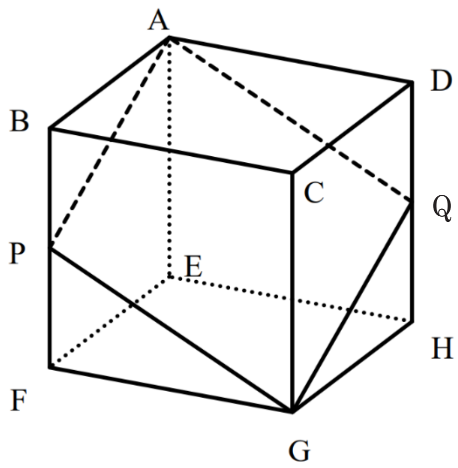
Ⅲ　xの2次関数 $y = x^2 + 2ax - a^2 + 5a + 3$ のグラフについて，次の問いに答えなさい。

問1　頂点の座標を求めなさい。

問2　頂点の x 座標が負であり，かつ，頂点のy 座標が正であるとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問3　a が問2で求めた範囲を動くとき，y の最小値を最大にするaの値と，そのときの最大値を求めなさい。

Ⅳ　下図は1辺の長さが2の立方体ABCD − EFGH である。また，辺BF, DH の中点をそれぞれP, Q とする。このとき，次の問いに答えなさい。



問1　対角線 AG の長さを求めなさい。

問2　四角形APGQに内接する円の半径 R を求めなさい。

問3　sin ∠PAQ の値を求めなさい。

問題は以上で終わりです。

2022年度　茨城キリスト教大学一般選抜入学試験１期

数学Ⅰ解答用紙（No. 1）

Ⅰ

問１	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	問２	$(x-2)(x-1)(x+6)(x+7)$
問３	$4+\sqrt{15}$	問４	$1 \leqq x < 3$
問５	②，③		

小　計

Ⅱ

問１	(1)	$5:6:7$	(2)	$\frac{1}{5}$
問２	(1)	$-1<a$	(2)	$3<a$

小　計

Ⅲ

問１

計算式

$y=x^2+2ax-a^2+5a+3$
$\quad =(x+a)^2-2a^2+5a+3$

よって，２次関数のグラフの頂点の座標は $(-a,-2a^2+5a+3)$ である．

答え　$(-a,-2a^2+5a+3)$

問２

計算式

頂点の x 座標が負であり，かつ，頂点のy 座標が正であるとき

$-a<0$ かつ $-2a^2+5a+3>0$

$\Leftrightarrow$ $a>0$ かつ $2a^2-5a-3<0$

$\Leftrightarrow$ $a>0$ かつ $(2a+1)(a-3)<0$

$\Leftrightarrow$ $a>0$ かつ $a-3<0$

$\Leftrightarrow$ $0<a<3$

答え　$0<a<3$

受 験 番 号	

数学Ⅰ解答用紙（No. 2）

問 3

計算式

2 次関数 $y = x^2 + 2ax - a^2 + 5a + 3$ のグラフは下に凸の放物線であるから，
x が実数全体を動くとき， y の最小値は頂点の y 座標の値に等しい．
したがって，y の最小値を m とおくと，問 1 の結果より

$$m = -2a^2 + 5a + 3$$

$$= -2\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$$

問 2 の結果より，a は $0 < a < 3$ の範囲を動く．また，m のグラフは 上に凸の放物線であるから，

$$a = \frac{5}{4}$$

のとき最大値をとる．このとき，最大値は

$$\frac{49}{8}$$

である．

答え　$a = \frac{5}{4}$ のとき，最大値 $\frac{49}{8}$

小　計

Ⅳ

問 1

計算式

直角三角形 EFG および直角三角形 AEG に三平方の定理を用いると

$$\mathrm{EG}^2 = \mathrm{EF}^2 + \mathrm{FG}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{EG}^2 = 2^2 + 8 = 12$$

したがって，

$$\mathrm{AG} = 2\sqrt{3}$$

答え　$2\sqrt{3}$

問 2

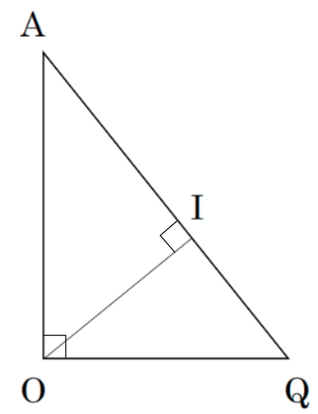
計算式

$$\mathrm{AP} = \mathrm{PG} = \mathrm{GQ} = \mathrm{QA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BP}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

したがって，四角形APGQ は 1 辺の長さが $\sqrt{5}$ のひし形である．
四角形APGQの対角線AG, PQ に関する線対称性から，四角形APGQの内接円の中心 O は
対角線AG, PQ の交点と一致する．したがって，四角形APGQに内接する円の半径 R は，
O から辺 AQ へ下した垂線 OI の長さに等しいので $\mathrm{OI} = R$ である．
右図において $\mathrm{AI} = x$ とおくと $\mathrm{QI} = \mathrm{AQ} - \mathrm{AI} = \sqrt{5} - x$ である．

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{OQ} = \frac{1}{2}\,\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2} = \sqrt{2}$$



直角三角形OAIと直角三角形OQI に三平方の定理を用いると

$$\begin{cases} \mathrm{OI}^2 + \mathrm{AI}^2 = \mathrm{OA}^2 \\ \mathrm{OI}^2 + \mathrm{QI}^2 = \mathrm{OQ}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R}^2 + x^2 = \sqrt{3}^2 \\ \mathrm{R}^2 + \left(\sqrt{5} - x\right)^2 = \sqrt{2}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R}^2 + x^2 = 3 \\ 3 - 2\sqrt{5}x + 5 = 2 \end{cases}$$

したがって，

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}}, \qquad R = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

答え　$R = \frac{\sqrt{30}}{5}$

受 験 番 号	

数学Ⅰ解答用紙（No. 3）

余白（計算に利用してください。）

問３

計算式

$\mathrm{OA}=\sqrt{3}, \mathrm{PQ}=2\sqrt{2}, \mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=\sqrt{5}$ であるから，三角形APQの面積に着目して

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}\times\sin\angle\mathrm{PAQ}$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\times2\sqrt{2}=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sin\angle\mathrm{PAQ}$$

したがって，

$$\sin\angle\mathrm{PAQ}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

答え　$\sin\angle\mathrm{PAQ}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

小　計

総　計

受 験 番 号	